

基本 例題 30 同じ数字を含む順列



1, 2, 3 の数字が書かれたカードがそれぞれ 2 枚, 3 枚, 4 枚ある。これらのカードから 4 枚を使ってできる 4 桁の整数の個数を求めよ。

基本 28

指針▷ 同じ数字のカードが何枚もあり (しかし, その枚数には制限がある), そこから整数を作る問題では, まず 作ることができる整数のタイプを考える。………

本問では, 使うことができる数字の制限から, 次の 4 つのタイプに分けることができる。

AAAA, AAAB, AABB, AABC

…… A, B, C は 1, 2, 3 のいずれかを表す。

このタイプ別に整数の個数を考える。

解答

1, 2, 3 のいずれかを A, B, C で表す。ただし, A, B, C はすべて異なる数字とする。

次の [1]~[4] のいずれかの場合が考えられる。

[1] AAAA のタイプ。つまり, 同じ数字を 4 つ含むとき。

4 枚ある数字は 3 だけであるから 1 個

◀ 3333 だけ。

[2] AAAB のタイプ。つまり, 同じ数字を 3 つ含むとき。

3 枚以上ある数字は 2, 3 であるから, A の選び方は 2 通り
A にどれを選んでも, B の選び方は 2 通り

◀ 222□ (□ は 1, 3)
または

そのおのおのについて, 並べ方は $\frac{4!}{3!} = 4$ (通り)

333□ (□ は 1, 2)

よって, このタイプの整数は $2 \times 2 \times 4 = 16$ (個)

[3] AABB のタイプ。

◀ 1122, 1133, 2233

つまり, 同じ数字 2 つを 2 組含むとき。

1, 2, 3 すべて 2 枚以上あるから, A, B の選び方は ${}_3C_2$ 通り

◀ 1, 2, 3 から使わない数を 1 つ選ぶと考えて, ${}_3C_1$ 通りとしてもよい。

そのおのおのについて, 並べ方は $\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

◀ ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

よって, このタイプの整数は ${}_3C_2 \times 6 = 18$ (個)

[4] AABC のタイプ。

◀ 1123, 2213, 3312

つまり, 同じ数字 2 つを 1 組含むとき。

A の選び方は 3 通りで, B, C は A を選べば決まる。

の 3 通りがある。なお, 例えば 1132 は 1123 と同じタイプであることに注意。

そのおのおのについて, 並べ方は $\frac{4!}{2!} = 12$ (通り)

よって, このタイプの整数は $3 \times 12 = 36$ (個)

以上から $1 + 16 + 18 + 36 = 71$ (個)

練習 30 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 の 7 つの数字のうちの 4 つを使って 4 桁の整数を作る。このような 4 桁の整数は全部で 個あり, このうち 2200 より小さいものは 個ある。